



Resolución de Problemas Verbales a Través de la Enseñanza con Variación y el Modelo de Barras de Singapur

Solving Word Problems Through Variation-Based Instruction and the Singapore Bar Model

Juan Luis Ramírez Lubianos ¹ | Doctor en Matemática Educativa por el Instituto Politécnico Nacional | México.

Cómo citar este artículo

Ramírez Lubianos, J:L: (2026). Resolución de problemas verbales a través de la enseñanza con variación y el modelo de barras de Singapur. *Revista DN Psicología y Educación*, 3(5). 84-104.

Resumen

La resolución de problemas verbales representa uno de los principales desafíos en la enseñanza de las matemáticas, debido a las dificultades que enfrentan muchos estudiantes para interpretar las relaciones cuantitativas y expresarlas mediante lenguaje algebraico. En este artículo se presenta una propuesta didáctica que integra la enseñanza con variación y el modelo de barras de Singapur como una alternativa para favorecer la comprensión y la resolución de este tipo de problemas. En primer lugar, se describen los principios fundamentales de la enseñanza con variación, destacando el papel de la variación conceptual y procedimental en el desarrollo de una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos. Posteriormente, se analiza el modelo de barras como una herramienta de representación visual que facilita la identificación de relaciones cuantitativas y la construcción de ecuaciones a partir de dichas relaciones. Finalmente, mediante diversos ejemplos y variaciones diseñadas siguiendo los principios de la enseñanza con variación, se muestra cómo ambas estrategias pueden complementarse para promover la comprensión conceptual, favorecer la transición del lenguaje verbal al lenguaje algebraico y fortalecer el desarrollo del pensamiento prealgebraico. Se concluye que la integración de ambos enfoques constituye una alternativa

¹ Juan Luis Ramírez Lubianos. Doctor en Matemática Educativa por el Instituto Politécnico Nacional (IPN), Maestro en Ciencias en Matemática Educativa y Licenciado en Matemáticas por la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEMéx). Ha ejercido la docencia durante 30 años en los niveles medio básico, medio superior y superior. Durante 25 años ha participado como entrenador de estudiantes para la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Sus líneas de investigación incluyen la enseñanza con variación, el modelo de barras de Singapur, la resolución de problemas verbales y el desarrollo del pensamiento prealgebraico. Correo: ramanujan_jl@yahoo.com.mx ID ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-0973-1625>



didáctica teóricamente fundamentada que merece ser explorada en la enseñanza de la resolución de problemas verbales.

Palabras clave: enseñanza con variación, modelo de barras, problemas verbales, pensamiento prealgebraico, educación matemática.

Abstract

Solving word problems remains one of the major challenges in mathematics education because many students experience difficulties interpreting quantitative relationships and expressing them through algebraic language. This paper presents a teaching proposal that integrates Teaching with Variation and the Singapore Bar Model as an alternative for improving students' understanding and solving of word problems. First, the main principles of Teaching with Variation are discussed, emphasizing the role of conceptual and procedural variation in promoting deeper mathematical understanding. Next, the Bar Model is examined as a visual representation tool that helps students identify quantitative relationships and construct algebraic equations from those relationships. Finally, several worked examples and original problem variations illustrate how both approaches complement each other to foster conceptual understanding, support the transition from verbal statements to algebraic representations, and strengthen the development of pre-algebraic thinking. It is concluded that integrating both approaches offers a theoretically grounded teaching alternative that deserves further exploration in mathematics classrooms, particularly in the teaching and learning of word problems.

Keywords: Teaching with Variation, Bar Model, word problems, pre-algebraic thinking, mathematics education.

Introducción

La resolución de problemas continúa siendo uno de los mayores desafíos en la enseñanza de las matemáticas en nuestro país. Los resultados de México en el examen del Programme for International Student Assessment [PISA], 2022 de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) indican que solo el 0.2 % de los estudiantes están en los niveles más avanzados en matemáticas resultados que sugieren que la mayoría de los estudiantes presentan dificultades para modelar situaciones complejas y seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas para resolver problemas (OCDE,



2023). Esta situación ha motivado la búsqueda de estrategias didácticas que favorezcan una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos y de las relaciones cuantitativas que subyacen en los problemas.

En este contexto, los sobresalientes resultados obtenidos por países del este asiático, particularmente China y Singapur, en evaluaciones internacionales como PISA han despertado un creciente interés por conocer las características de la enseñanza de las matemáticas en dichos sistemas educativos. Diversos estudios coinciden en señalar que la enseñanza en estos países se distingue por un fuerte énfasis en la comprensión conceptual, el uso de un lenguaje matemático preciso, la resolución de problemas y la aplicación sistemática de la enseñanza con variación (Cai & Nie, 2007; Lim 2007; Tu & Shen 2010).

La enseñanza con variación ha despertado un interés creciente entre investigadores y docentes debido a su potencial para promover un aprendizaje profundo. Este enfoque favorece que los estudiantes identifiquen las características esenciales de los conceptos matemáticos mediante la comparación de ejemplos cuidadosamente diseñados, el análisis de diferentes procedimientos de resolución y la exploración sistemática de variaciones de un mismo problema (Sun, 2011, Li et al., 2011; Lai & Murray, 2012).

De manera complementaria, el modelo de barras ha demostrado ser una herramienta de representación visual eficaz para representar las relaciones cuantitativas presentes en los problemas verbales, facilitando su comprensión y resolución. Si bien ambos enfoques han sido estudiados de forma independiente, su integración ofrece una posibilidad interesante para fortalecer la resolución de problemas, ya que la enseñanza con variación permite comprender las relaciones entre conceptos mediante la comparación de ejemplos y variaciones mientras que el modelo de barras hace visibles las relaciones cuantitativas mediante representaciones gráficas.

La propuesta presentada en este artículo parte de considerar que la enseñanza con variación orienta el diseño de secuencias de problemas verbales, mientras que el modelo de barras proporciona una representación visual que permite representar las relaciones cuantitativas presentes, así como facilitar el planteamiento y resolución de las ecuaciones. Más que ofrecer una metodología definitiva, constituye una



alternativa teóricamente fundamentada que merece ser explorada en la práctica docente y en futuras investigaciones en matemática educativa.

2. Enseñanza con variación

La variación en matemáticas, según Tu & Shen (2010), implica representar objetos matemáticos desde diferentes perspectivas, alterando atributos no esenciales y manteniendo los esenciales. Además, la enseñanza con variación también implica la presentación de una serie de problemas relacionados con el objetivo de ayudar a los estudiantes a comprender un concepto, perfeccionar sus habilidades de resolución de problemas o realizar generalizaciones. La práctica de la variación ha logrado una atención considerable debido a la importancia de las variaciones como condiciones necesarias para el aprendizaje profundo (Sun, 2011b).

Por ejemplo, al enseñar el concepto de ecuación, además de mostrar expresiones que son ecuaciones, se proporcionan expresiones que no lo son (Tabla 1), lo que permite identificar las características esenciales de una ecuación, como la presencia del signo igual y de al menos una variable (Lai & Murray, 2012).

Tabla 1

Ejemplos variantes para identificar las características esenciales de una ecuación

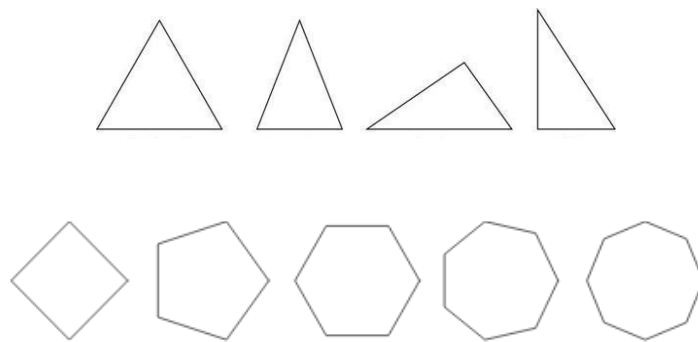
Expresiones que son ecuaciones	Expresiones que no son ecuaciones
$2x = 1$	$2x - 3 > 2$
$3x + 4 = 7$	$2 + 6 = 8$
$x^2 + y^2 = 1$	$1 + 8$
$x = 8$	

Nota. Tabla de elaboración propia con ejemplos tomados de Li, J., Peng, A., & Song, N. (2011). Teaching Algebraic Equations with Variation in Chinese Classroom.

Cuando se enseña el concepto de triángulo, no es suficiente mostrar únicamente diferentes tipos de triángulos, sino, además, presentar otras figuras o polígonos que no son triángulos (Figura 1) de tal forma que los estudiantes identifiquen las características esenciales de un triángulo.

Figura 1

Ejemplos de triángulos y otras figuras geométricas



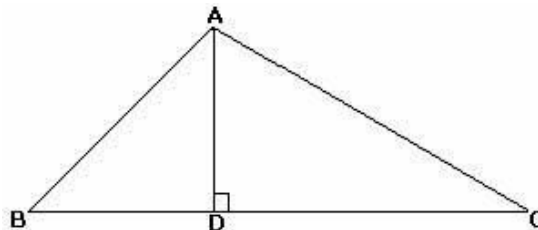
Nota: Ejemplos de triángulos y otras figuras

2.1 Variación conceptual

La variación conceptual se divide en dos partes. La primera implica variar la connotación de un concepto mediante la presentación de ejemplos estándar y no estándar. La segunda se centra en resaltar las características esenciales de un concepto mediante la comparación con “*no ejemplos*”, con el propósito de brindar a los estudiantes múltiples perspectivas (Park, 2006). Por ejemplo, cuando se explica la definición de altura de un triángulo, no es suficiente mostrar únicamente la forma estándar para que los estudiantes comprendan este concepto (Figura 2).

Figura 2

Ejemplo estándar de altura de un triángulo

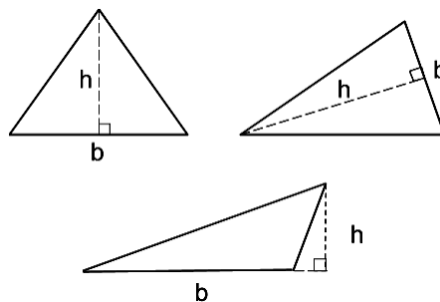


Nota. Ejemplo estándar de altura en un triángulo

Por lo que es esencial variar características no esenciales, como la forma del triángulo o el vértice desde donde se traza la altura. Esto permite a los estudiantes mejorar el entendimiento del concepto de altura (Figura 3).

Figura 3

Ejemplos de alturas en un triángulo

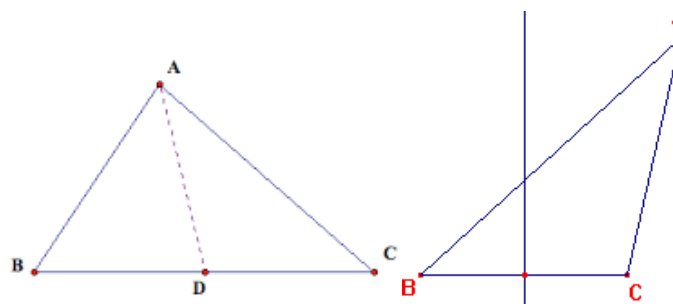


Nota. Alturas en diferentes tipos de triángulo y trazadas desde distintos vértices

Asimismo, es necesario exhibir “no ejemplos”, es decir, segmentos que no cumplen con la definición de altura (Figura 4), lo que permite a los estudiantes identificar las características esenciales de una altura.

Figura 4

Ejemplos de segmentos que no son alturas



Nota. Ejemplos de segmentos que no son alturas



Desde esta perspectiva, el propósito de la variación conceptual no consiste en presentar una gran cantidad de ejemplos semejantes, sino en construir secuencias de ejemplos y no ejemplos donde las modificaciones sean intencionales. Al compararlos, los estudiantes pueden identificar qué aspectos permanecen invariantes y cuáles cambian, favoreciendo la comprensión de los conceptos analizados. Asimismo cuando un docente presenta un mismo problema de distintas maneras o propone diferentes métodos para resolverlo, está aplicando un principio fundamental de la enseñanza con variación procedimental.

2.2 Variación procedimental

La variación procedimental tiene como propósito desarrollar una interpretación profunda de los procedimientos matemáticos mediante la resolución de una secuencia de problemas cuidadosamente relacionados. A diferencia de la práctica repetitiva basada en ejercicios similares, este enfoque propone introducir variaciones diseñadas cuidadosamente por el docente que permitan a los estudiantes establecer conexiones entre diferentes procedimientos, representaciones y estructuras matemáticas. Diversas investigaciones muestran que este tipo de enseñanza favorece la comprensión conceptual, el razonamiento matemático y la resolución de problemas, ya que los estudiantes no solo aprenden a aplicar un procedimiento, sino también a reconocer cuándo y por qué puede utilizarse (Cai & Nie, 2007; Lim, 2007; Lai & Murray, 2012).

Desde esta perspectiva, el docente desempeña un papel fundamental al diseñar secuencias de problemas en las que las variaciones sean intencionales y respondan a un objetivo de aprendizaje claramente definido. En las aulas chinas, esta forma de enseñanza suele manifestarse mediante la presentación de diferentes métodos para resolver un mismo problema, la modificación gradual de las condiciones de un problema inicial o la aplicación de un mismo procedimiento a diversas situaciones matemáticas. Lai y Murray (2012) agrupan estas posibilidades en tres formas principales de variación procedimental: un problema con múltiples cambios, un problema con múltiples soluciones y múltiples aplicaciones de un método, las cuales se describen a continuación.

2.2.1 Un problema con múltiples cambios

Su objetivo es consolidar un concepto mediante la extensión del problema original a través de variaciones en las condiciones. Se considera el problema: “¿Cuántos árboles se necesitarán para seis surcos si cada



surco puede tener cuatro árboles?” (Tomado de Sun, 2011) A partir de este problema, se proponen las siguientes dos variaciones:

Variación 1. ¿Cuántos árboles tendrá cada surco si plantamos 24 árboles en 6 surcos?

Variación 2. ¿Cuántos surcos necesitaremos para plantar 24 árboles de manera que cada surco tenga 6 árboles?

Estas variaciones en las condiciones del problema original permiten a los estudiantes desarrollar un discernimiento más profundo de la relación entre la multiplicación y división, así como el significado de “igual”. Al trabajar con estas variaciones, los estudiantes pueden reconocer que la multiplicación y división son operaciones inversas. En otras palabras, si saben cómo multiplicar (por ejemplo, 4×6), pueden aplicar este conocimiento para resolver divisiones relacionadas (por ejemplo, $24 \div 4 = 6$ o $24 \div 6$).

Cabe señalar la importancia de seleccionar cuidadosamente los tipos de variaciones que se utilizan y asegurarse que se adapten al nivel cognitivo de los estudiantes, lo que, como sugiere Li et al. (2011), puede mejorar sustancialmente la calidad del aprendizaje.

2.2.2 Un problema con múltiples soluciones.

Este segundo tipo de variación su propósito es fomentar las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas mediante la variación de los métodos de solución de un mismo problema. Se presenta el siguiente ejemplo (tomado de Cai & Nei, 2007).

La Escuela Primaria Liming planea comprar 12 balones de basquetbol, cada uno cuesta 24 yuanes. Antes de adquirir estos balones, la escuela gastó 144 yuanes en balones de fútbol. ¿Cuántos balones de basquetbol puede comprar la escuela con el dinero restante?

Se exponen tres soluciones diferentes para abordar este problema:

1. Calculando la cantidad original de los fondos y restando el gasto en los balones de fútbol: $\frac{24 \times 12 - 144}{24} = \frac{144}{24} = 6$ balones de basquetbol.

2. Calculando el número de balones de basquetbol que no se comprarán $12 - \left(\frac{144}{24}\right) = 6$ balones de basquetbol.

3. Suponiendo que la escuela puede comprar x balones de basquetbol, luego $24 \times 12 = 24x + 144$. Por lo tanto $x = 6$ balones de basquetbol.

Esta variación de procedimientos brinda un enfoque estructurado para exponer las ideas matemáticas subyacentes, mejorar la comprensión conceptual de una serie de temas relacionados (Lai & Murray, 2012), asimismo se requiere encontrar diferentes soluciones, lo que fomenta la reflexión, la interrelación y generalización tanto para estudiantes como para maestros (Sun, 2011a).

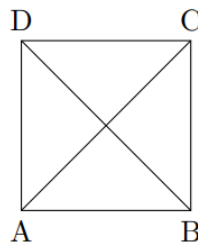
2.2.3 Múltiples aplicaciones de un método

Esta forma de variación tiene como propósito que los estudiantes reconozcan cuándo un mismo procedimiento puede aplicarse para resolver diferentes problemas. En lugar de aprender estrategias aisladas para cada situación, los alumnos identifican un método común que puede transferirse a diversos contextos matemáticos, favoreciendo así la generalización del conocimiento (Lai & Murray, 2012).

Un ejemplo de este enfoque es el conocido problema de los saludos: en una reunión donde cada persona saluda una sola vez a todas las demás, ¿cuántos saludos se realizan? Inicialmente, el problema puede resolverse para grupos pequeños mediante una representación gráfica (Figura 5) lo que permite identificar el patrón de formación de los saludos.

Figura 5

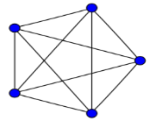
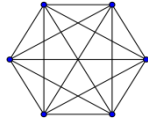
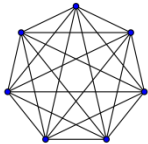
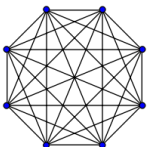
Representación gráfica de cuatro personas donde todas se saludan



Nota. Representación gráfica de cuatro personas donde todas se saludan

Posteriormente, el mismo procedimiento se aplica a grupos de cinco, seis, siete u ocho personas (Tabla 2).

Tabla 2. *Representación gráfica del número de saludos a partir del número de personas.*

Número de personas	Número de saludos	Representación geométrica
5	10	
6	15	
7	21	
8	28	

Nota. Tabla de elaboración propia con ejemplos tomados de Lai, M & Murray, S. (2012). Teaching with Procedural Variation: A Chinese Way of Promoting Deep Understanding of Mathematics

A partir de estos casos particulares, los estudiantes descubren que el procedimiento utilizado puede generalizarse mediante la expresión matemática conocida $(n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2})$. Esta misma fórmula se puede usar para resolver el siguiente problema: En una villa hay 20 calles, todas las calles son rectas. Un poste de luz se coloca en cada intersección. ¿Cuál es el máximo número de postes de luz que se necesitan?



Más importante aún, comprenden que ese mismo razonamiento puede emplearse para resolver otros problemas con una estructura similar como por ejemplo: ¿Cuántas diagonales tiene un dodecágono? Desde la perspectiva de la enseñanza con variación, el objetivo no es memorizar una fórmula, sino en ayudar a los estudiantes a reconocer que un mismo procedimiento puede resolver problemas con contextos diferentes pero con una estructura matemática común.

En resumen la variación conceptual busca que los estudiantes identifiquen las características esenciales de un concepto mediante ejemplos y no ejemplos, la variación procedimental se centra en el diseño de secuencias de problemas que favorezcan la comprensión de los procedimientos matemáticos y las relaciones entre ellos.

En el contexto de los problemas verbales, la enseñanza con variación ofrece un marco especialmente valioso. Diseñar problemas en las que cambian determinados datos, contextos o relaciones, mientras otras permanecen constantes, permite que los estudiantes centren su atención en la estructura matemática del problema antes que en cálculos aislados. Esta idea constituye el punto de partida para integrar el modelo de barras como una herramienta de representación visual que facilite la interpretación de dichas relaciones.

Por último, es importante resaltar que la enseñanza con variación encuentra su fundamento teórico en la Teoría de la Variación propuesta por Marton, la cual sostiene que el aprendizaje depende de que los estudiantes logren discernir los aspectos críticos de un objeto de aprendizaje mediante experiencias de variación cuidadosamente diseñadas. Desde esta perspectiva, la selección, organización y secuenciación de las tareas constituyen elementos esenciales para favorecer la comprensión de los conceptos matemáticos (Ascencio-González & Eccius-Wellmann, 2019).

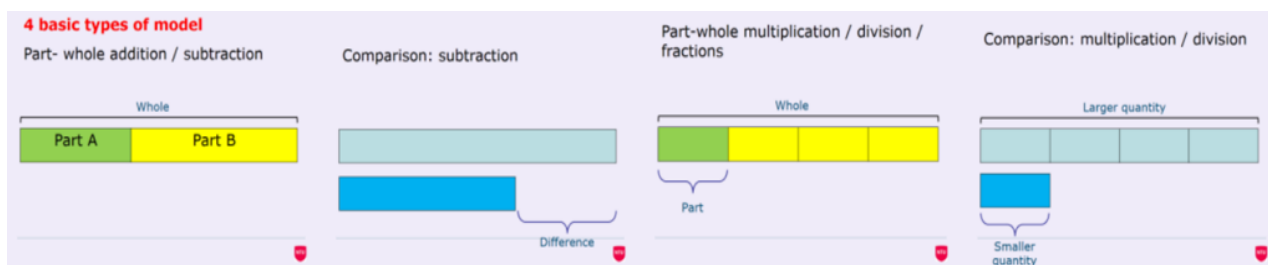
3. Modelo de barras de Singapur

Una de las principales dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver problemas verbales consiste en transformar un enunciado escrito en una representación matemática. El modelo de barras de Singapur ofrece una alternativa para superar esta dificultad mediante representaciones visuales que permiten organizar la información, identificar las relaciones entre las cantidades y facilitar la construcción del modelo matemático necesario para resolver el problema (Shah et al., 2021).

Dependiendo de la estructura del problema, el modelo de barras emplea cuatro representaciones fundamentales: la relación parte-todo para la adición y la sustracción, la comparación mediante sustracción, la relación parte-todo para la multiplicación y la división, y la comparación mediante multiplicación y división (Figura 6). Estas estructuras constituyen la base para representar una amplia variedad de problemas verbales.

Figura 6

Cuatro modelos del modelo de barras de Singapur



Nota. Reproducida de Using the Bar Model to Support the Interpretation and Understanding of Word Problems in Key Stage 2, por R. Spencer y H. Fielding, 2015

Más que un procedimiento rígido, el modelo de barras constituye una herramienta de representación que permite hacer visibles las relaciones cuantitativas descritas en un problema verbal. El siguiente ejemplo ilustra cómo una situación que inicialmente parece compleja puede analizarse paso a paso mediante representaciones gráficas sencillas.

Abigail es 8 años mayor que Cynthia. Hace 20 años Abigail era tres veces mayor que Cynthia. ¿Qué edad tiene cada una actualmente?

El primer paso consiste en representar las edades actuales de Abigail y Cynthia mediante dos barras de distinta longitud. Como Abigail es ocho años mayor que Cynthia, la diferencia entre ambas barras representa precisamente esos ocho años (Figura 7).

Figura 7

Representación en barras de las edades de Abigail y Chynthia

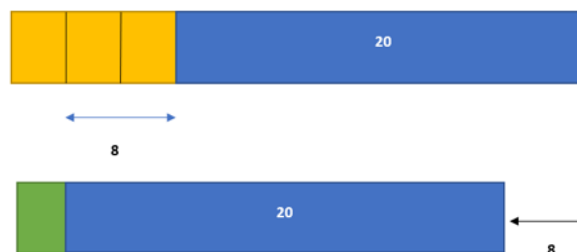


Nota. Figura de elaboración propia. Para la representación visual de las condiciones iniciales se utiliza un Modelo de barras comparación: sustracción que representa la diferencia de edades entre Abigail y Cynthia es de 8 años.

Posteriormente se incorpora la segunda condición del problema: “hace veinte años la edad de Abigail era el triple de la edad de Cynthia”. Para representar esta nueva información se añaden barras auxiliares y subdivisiones que permiten visualizar simultáneamente la diferencia de edades y la relación de proporcionalidad entre ambas cantidades (Figura 8).

Figura 8

Creación de barra adicional y subdivisiones



Nota. Figura de elaboración propia. Se agregan barras auxiliares que representan la variación temporal de “hace 20 años” y subdivisiones para visualizar la relación cuantitativa “la edad de Abigail era el triple de la edad de Cynthia”.

La representación permite identificar visualmente que la diferencia de ocho años corresponde exactamente a dos de las subdivisiones iguales de la barra superior. Esta observación facilita deducir que cada subdivisión representa cuatro años, sin necesidad de recurrir inicialmente al planteamiento algebraico.



Este ejemplo muestra cómo el modelo de barras transforma un problema verbal complejo en una representación gráfica donde las relaciones entre las cantidades se vuelven visibles. En lugar de comenzar con ecuaciones, los estudiantes analizan primero la estructura del problema y, a partir de ella, construyen el procedimiento de solución.

A diferencia de un dibujo ilustrativo, las barras no representan objetos reales, sino relaciones entre cantidades. Su longitud es proporcional a los valores que representan, lo que permite visualizar comparaciones, igualdades y relaciones parte-todo de una manera intuitiva.

Para tener una mejor comprensión de cómo se resuelven problemas verbales usando el modelo de barras se recomienda la lectura del artículo *“El modelo de barras como recurso visual para el pensamiento preálgebraico”* del mismo autor en el cual se explican los componentes analíticos de la visualización a través del modelo de barras.

4. Integración de la enseñanza con variación y el modelo de barras en la resolución de problemas verbales

Hasta este punto se han presentado, por separado, los principios de la enseñanza con variación y el modelo de barras de Singapur. Sin embargo, el mayor potencial de ambos enfoques surge cuando se integran dentro de una misma propuesta didáctica. Mientras la enseñanza con variación orienta el diseño de secuencias de problemas que favorecen la comprensión conceptual, el modelo de barras proporciona una representación visual que ayuda a interpretar las relaciones cuantitativas y facilita su posterior expresión mediante lenguaje algebraico.

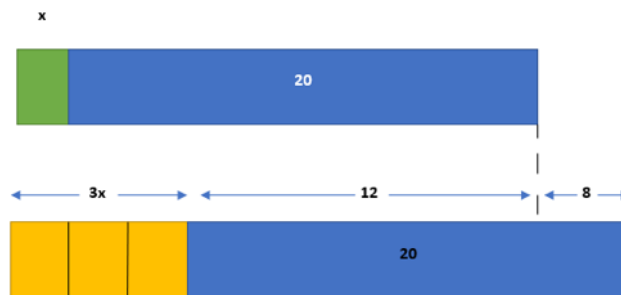
Los ejemplos que se presentan a continuación ilustran cómo ambas estrategias pueden complementarse durante la resolución de problemas verbales. Cada ejemplo se desarrolla en tres momentos: primero se representa el problema mediante un modelo de barras; posteriormente se plantea una formulación algebraica apoyada en dicha representación; finalmente, se proponen variaciones del problema original para favorecer una interpretación más profunda de las relaciones matemáticas involucradas.

Abigail es 8 años mayor que Cynthia. Hace 20 años Abigail era tres veces mayor que Cynthia. ¿Qué edad tiene cada una actualmente?

Una vez construida la representación mediante el modelo de barras la ecuación no se obtiene directamente del enunciado del problema, sino de las relaciones geométricas que se observan en la representación visual. Sea x la edad de Cynthia hace veinte años; en consecuencia, la edad de Abigail en ese momento se representa mediante $3x$. Al incorporar el transcurso de veinte años y comparar las longitudes de las barras, se observa que la barra correspondiente a la edad actual de Cynthia, de longitud $x + 20$, coincide con la porción de la barra de Abigail cuya longitud es $3x + (20 - 8) = 3x + 12$ (Figura 9). De esta relación se obtiene la ecuación: $x + 20 = 3x + 12$. Al resolverla se obtiene $x = 4$. En consecuencia, hace veinte años Cynthia tenía 4 años y Abigail 12 años; por lo tanto, sus edades actuales son 24 y 32 años, respectivamente.

Figura 9

Formulación algebraica en el modelo de barras



Nota. Figura de elaboración propia. Se utiliza el modelo de barras comparación: multiplicación /división para la formulación algebraica del problema.

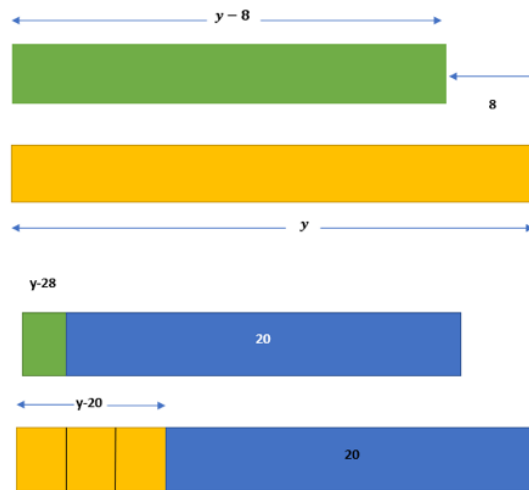
Cabe enfatizar que ya se había resaltado que la diferencia de las longitudes entre las barras es 8, y como la barra superior es una “subestructura” de la inferior, la longitud de dos rectángulos amarillos es 8, es decir, $8 = 2x$, luego $x = 4$. En consecuencia el valor de x se puede encontrar reorganizando el modelo de barras.

La misma representación visual permite construir una formulación algebraica diferente. Sea y la edad actual de Abigail; entonces la edad actual de Cynthia se representa mediante $y - 8$. Al retroceder veinte años, las edades corresponden a $y - 20$ y $y - 28$, respectivamente. Como la representación muestra que hace veinte años la edad de Abigail era el triple de la de Cynthia, se obtiene la ecuación: $y - 20 = 3(y - 28)$

28) (Figura 10). Al resolverla se obtiene $y = 32$. En consecuencia, las edades actuales de Abigail y Cynthia son 32 y 24 años, respectivamente.

Figura 10

Formulación algebraica en el modelo de barras



Nota. Figura de elaboración propia. Se utilizan los modelos de barras comparación: sustracción y de comparación: multiplicación /división para la formulación algebraica del problema.

Cabe señalar que el modelo de barras no constituye únicamente una representación visual; se convierte en un espacio intermedio entre el lenguaje verbal y el lenguaje algebraico, desde el cual los estudiantes pueden construir las ecuaciones que modelan las relaciones cuantitativas del problema.

El siguiente problema ilustra nuevamente cómo el modelo de barras permite representar relaciones multiplicativas y construir, a partir de ellas, diferentes formulaciones algebraicas.

Ricardo y su papá pesan 85 kilos en total. El papá pesa 5 kilos más que el triple de Ricardo. ¿Cuánto pesa Ricardo?

El primer paso consiste en representar el peso de Ricardo mediante una unidad gráfica (cuadrado azul). Como el peso del papá equivale al triple del peso de Ricardo más 5 kg, se construye una segunda barra formada por tres unidades iguales y un segmento adicional que representa los 5 kg (Figura 11).

Figura 11

Representación visual usando modelo de barras



Nota. Figura de elaboración propia. Se representa visualmente que el peso del papá es el triple del peso del hijo, se agrega un rectángulo auxiliar que representan la cantidad conocida de 5 kilos.

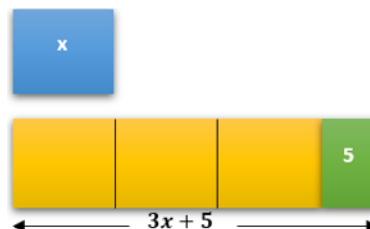
La representación permite visualizar inmediatamente que, al excluir el segmento correspondiente a los 5 kg, las cuatro unidades restantes representan un total de 80 kg (Figura 11). En consecuencia, cada unidad equivale a 20 kg, por lo que el peso de Ricardo es de 20 kg y el de su papá de 65 kg.

Al igual que en el ejemplo anterior, la representación obtenida facilita construir distintas formulaciones algebraicas para resolver el mismo problema. Esta característica resulta especialmente valiosa desde una perspectiva didáctica, ya que muestra a los estudiantes que una misma situación puede expresarse mediante ecuaciones equivalentes.

a) Sea x el peso de Ricardo. Como el peso del papá corresponde a $3x + 5$, la representación de la Figura 12 permite formular directamente la ecuación $x + (3x + 5) = 85$. Al resolverla se obtiene $x = 20$, por lo que el peso del papá es de 65 kg.

Figura 12

Representación algebraica en el modelo de barras



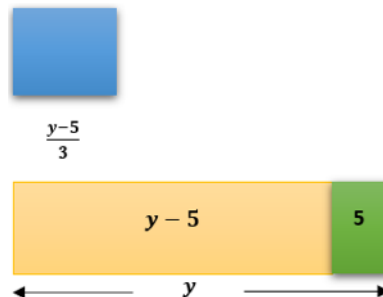
Nota. Figura de elaboración propia. Se utiliza el modelo de barras comparación: multiplicación /división para la formulación algebraica del problema

Se hace notar que la ecuación no necesariamente se obtiene directamente del enunciado verbal, sino de las relaciones cuantitativas que se hacen visibles en el modelo de barras. Esta característica constituye una de las principales fortalezas del modelo de barra como herramienta para favorecer la transición del razonamiento visual al razonamiento algebraico.

b) Sea y el peso del papá, y como pesa 5 kilos más que el triple de Ricardo, la expresión $y - 5$ representa el triple del peso de Ricardo, luego el peso de Ricardo se representa con la expresión $\frac{y-5}{3}$ (Figura 13). Al omitir el rectángulo que representa la cantidad conocida de 5 kg, las barras restantes representan conjuntamente 80 kg. Luego se plantea la ecuación $(y - 5) + \left(\frac{y-5}{3}\right) = 80$, que al resolverla se obtiene $y = 65$, y por tanto $\frac{y-5}{3} = 20$, en consecuencia, el peso de Ricardo es de 20 kg.

Figura 13

Representación algebraica en el modelo de barras



Nota. Figura de elaboración propia. Se utiliza el modelo de barras comparación: multiplicación /división para la formulación algebraica del problema

A partir de este problema se plantean variaciones a los estudiantes como las siguientes:

Variación 1. *Ricardo y su papá pesan 95 kg en total. El papá pesa 5 kg menos que el doble del peso de Ricardo. ¿Cuánto pesa Ricardo?*

En esta variación se modifican tres elementos del problema original: el peso total, el factor de proporcionalidad (de tres veces a dos veces) y la diferencia constante entre ambos pesos (de 5 kg más a 5 kg menos). No obstante, permanece invariante la estructura matemática del problema, ya que continúa



describiéndose una relación proporcional entre dos cantidades y una condición aditiva asociada al peso total. Estas modificaciones obligan a los estudiantes a reinterpretar las relaciones entre las cantidades y adaptar el procedimiento de resolución sin perder de vista la estructura del problema original.

Variación 2. Ricardo y su papá pesan 129 kg en total. El papá pesa 9 kg más que el cuádruple del peso de Ricardo. ¿Cuánto pesa el papá?

En esta segunda variación vuelven a modificarse el peso total, el factor de proporcionalidad y la diferencia constante entre ambos pesos. Además, se cambia la cantidad solicitada, ya que ahora se pregunta por el peso del papá en lugar del peso de Ricardo. A pesar de estas modificaciones, permanece invariante la estructura proporcional del problema y la estrategia general de representación mediante el modelo de barras. Este tipo de variaciones favorece que los estudiantes distingan entre los elementos superficiales del problema y las relaciones matemáticas esenciales que permanecen constantes.

Las dos variaciones fueron diseñadas con el propósito de modificar deliberadamente algunos elementos del problema, mientras se conservan las relaciones matemáticas esenciales. Desde la perspectiva de la enseñanza con variación, el objetivo no consiste en ofrecer más ejercicios para practicar un procedimiento, sino en dirigir la atención de los estudiantes hacia aquellos aspectos que permanecen invariantes. De esta manera, las modificaciones dejan de ser simples cambios numéricos y se convierten en oportunidades para comprender con mayor profundidad la estructura matemática común a todos los problemas.

Es importante señalar que el diseño de variaciones no consiste únicamente en modificar datos o cambiar el contexto de un problema. Requiere que el docente analice cuidadosamente la estructura matemática involucrada, identifique los conceptos esenciales y determine cuáles elementos deben permanecer invariantes y cuáles pueden variar para favorecer nuevas conexiones conceptuales. Desde esta perspectiva, la enseñanza con variación demanda una planificación didáctica cuidadosa, en la que cada modificación responde a un propósito específico de aprendizaje y no a un simple incremento en la cantidad de ejercicios.

5. Conclusiones

La integración de la enseñanza con variación y el modelo de barras constituye una alternativa didáctica para la resolución de problemas verbales que conecta dos perspectivas complementarias. Mientras la enseñanza con variación orienta el diseño de secuencias de problemas que permiten a los estudiantes



identificar qué elementos cambian y cuáles permanecen invariantes, el modelo de barras proporciona una representación visual que fortalece la interpretación de las relaciones cuantitativas presentes en el problema. De esta manera, ambas estrategias contribuyen a favorecer una comprensión conceptual más profunda antes de la formalización algebraica.

Los ejemplos analizados muestran que el modelo de barras no solo facilita la interpretación de los problemas verbales, sino que también ofrece una vía para construir y resolver las ecuaciones a partir de las relaciones representadas visualmente. En este sentido, la representación gráfica deja de ser un simple recurso ilustrativo para convertirse en un puente entre el lenguaje verbal y el lenguaje algebraico, especialmente en aquellos problemas donde la formulación de una ecuación no resulta inmediata. Esta perspectiva coincide con los resultados presentados en el trabajo *El modelo de barras como recurso visual para el pensamiento prealgebraico*, en el que se argumenta que el modelo de barras no sustituye el razonamiento algebraico, sino que constituye una herramienta que favorece su construcción y comprensión.

Finalmente, el diseño de variaciones de problemas verbales puede representar un reto para el docente, ya que exige comprender la estructura matemática del problema original con el propósito de decidir qué elementos deben modificarse y cuáles deben permanecer invariantes para favorecer nuevas conexiones conceptuales. Las variaciones presentadas en este trabajo fueron diseñadas por el autor siguiendo los principios de la enseñanza con variación, procurando modificar cuidadosamente algunos elementos del problema mientras se conservan las relaciones matemáticas esenciales. Se espera que la propuesta presentada contribuya a motivar nuevas experiencias de aula y futuras investigaciones orientadas a explorar el potencial de la enseñanza con variación y del modelo de barras para fortalecer el desarrollo del pensamiento prealgebraico y la resolución de problemas verbales.

Bibliografía

Spencer, R., & Fielding, H. (2015). Using the Singapore Bar Model to support the interpretation and understanding of word problems in Key Stage 2. En British Society for Research into Learning Mathematics (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp. 114–119). BSRLM



- Sun, X. (2011a). An insider's perspective: "variation problems" and their cultural grounds in chinese curriculum practice. *Journal of Mathematics Education*, 4(1), 101–114.
- Sun, X. (2011b). “Variation problems” and their roles in the topic of fraction division in chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 65–85.
- Thirunavukkarasu, M., & Senthilnathan, S. (2017). Effectiveness of bar model in teaching algebra at secondary level. *International Journal of Teacher Educational Research*, 6(10–12), 34–42.
- Tu, R. & Shen, W. (2010). Fundamental focuses of chinese mathematics: characteristics of mathematics teaching in China. *Journal of Mathematics Education*, 3(2), 160–169.